Задача 1.7.1. Бег по кругу (10 баллов). С линии старта одновременно в одну сторону по круговой дорожке стадиона побежали два спортсмена *A* и *B*. Бегун *A* первую половину каждого круга бежал со скоростью 2υ, а вторую – со скоростью υ. Бегун *B* первую половину времени, затраченного на прохождение круга, бежал со скоростью υ, а вторую – со скоростью 2υ. Известно, что бегун *A* пробегал полный круг за T_A = 90 с.

Через какое время *t* один спортсмен догнал другого первый раз после старта?

Через какое время *T* один из бегунов обогнал другого ровно на один круг?

Возможное решение (А. Аполонский). Пусть *S* – длина одного круга на стадионе. На преодоление первой половины круга бегун *A* затратил время

$$t_{A.1} = \frac{S/2}{2\upsilon} = \frac{1}{4}\frac{S}{\upsilon}.$$

Вторую половину круга он пробежал за

$$t_{A.2} = \frac{S/2}{\upsilon} = \frac{1}{2}\frac{S}{\upsilon}.$$

На преодоление всего круга ему потребовалось $T_A = t_{A.1} + t_{A.2} = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\frac{S}{\upsilon} = \frac{3}{4}\frac{S}{\upsilon} = 90$ с.

Отсюда $S/\upsilon = 120$ с; $t_{A.1} = 30$ с; $t_{A.2} = 60$ с.

Пусть бегун *B* пробегал круг за время T_B. Длина первого участка, который он пробегал за время $T_B/2$, равна $S_{B.1} = \upsilon \cdot \frac{T_B}{2}$. Длина второго участка $S_{B.2} = 2\upsilon \cdot \frac{T_B}{2} = \upsilon T_B$.

Поскольку $S = S_{B.1} + S_{B.2} = \frac{3}{2}\upsilon T_B$, то $T_B = \frac{2}{3}\frac{S}{\upsilon} = 80$ с.

Бегун *B* пробежал первый круг быстрее бегуна *A* на $\Delta t = T_A - T_B = 10$ с. Так как скорости спортсменов отличаются в 2 раза, первая встреча бегунов произойдёт через время $t = T_B - \Delta t_1 = 70$ с.

Пусть бегуны поравнялись на линии старта после того, как спортсмен *A* пробежал *N* кругов. Бегун *B* пробежал на круг больше: $NT_A = (N+1)T_B$ или $N\frac{3}{4}\frac{S}{\upsilon} = (N+1)\frac{2}{3}\frac{S}{\upsilon}$.

Отсюда находим $N = 8$. Это случится через время $T = NT_A = 8 \cdot 90$ с = 720 с.

№	Задача 1.7.1. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Найдено отношения $S/\upsilon = 120$ с	2
2	Найдено время $T_B = 80$ с за которое бегун *B* пробегал полный круг	2
3	Найдено время $\Delta t = 10$ с на которое бегун *B* опережал бегуна *A* за 1 круг	1
4	Найдено время $t = 70$ с до первой встречи	2
5	Записано уравнение относительно *N*	1
6	Найдено число *N* полных кругов, которые пробежал *A* до встречи с *B*	1
7	Найдено время *T* до этой встречи: $T = NT_A = 720$ с	1